第 12 章　稳恒磁场

一　求磁感应强度

0. 磁场与磁感应强度相关概念

① **磁场**

· 运动电荷在其周围空间产生磁场，通过磁场对其它运动电荷施加作用力

② **磁感应强度**

· 磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 反映场内某点的磁场方向与强弱（矢量场），单位：特斯拉（T）

· 运动电荷（速度 $\boldsymbol{v}$ ）在某点（磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ ）受到的磁场作用力（洛伦兹力）为

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}}$$

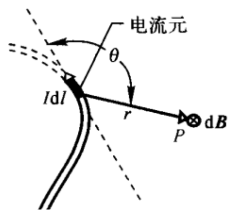
③ **磁感应线**

· 形象展示磁感应强度分布的假想图线，没有起终点，环绕方向与电流方向服从右螺旋法则

> **右螺旋法则**　用右手竖一个👍（这个 emoji 是左手）
> 若是直线电流产生的磁场，大拇指指向电流方向，则其它四指的绕行方向就是 $\boldsymbol{B}$ 的方向
> 若是环形电流产生的磁场，其它四指的绕行方向为电流方向，则大拇指指向 $\boldsymbol{B}$ 的方向

2. 用毕奥-萨伐尔定律求磁感应强度

① **毕奥-萨伐尔定律**



· 长 $\mathrm{d}l$ 的电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$（微元，视为一个点）在点 P 处产生的磁感应强度

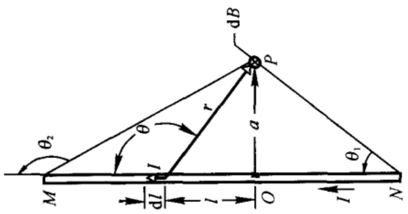
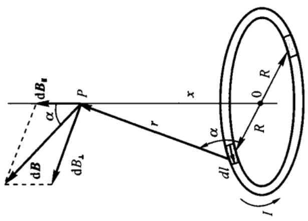
$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3}}$$

· I：电流　　$\boldsymbol{r}$：电流元指向 P 的矢量　　μ_0：**真空磁导率**，$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$

② **叠加原理**

· 点 P 处的磁感应强度由各电流元在该点处产生的磁感应强度的矢量和

③ **由定律得到的基本结论**

长直载流导线	载流圆线圈
	
$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}$	$\boxed{B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}}$
方向由右螺旋法则确定	

③ **由常用结论得到的特殊结论**

· 无限长直导线距离 a 处

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}$$

· 圆弧形电流（圆心角 θ ）在圆心处

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\theta}{2\pi}}$$

用毕奥-萨伐尔定律与叠加原理求磁感应强度的基本流程

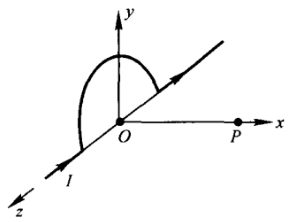
· 最一般的情况：根据微元法表示出 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ ，代入公式得到 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$ 后进行积分（例 1）

· 常见的情形是产生磁场的电流可以分解为直线电流、圆环电流等“基本单元”

这时应根据上面的已有结论分别求出各部分产生的磁场，再根据叠加原理将 $\boldsymbol{B}$ 相加。

若电流是连续分布的，则应将这些微电流其产生的磁场表示为 $\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\times\times\times \mathrm{d}I$ ，再积分（例 2 及后）

例 1 如图所示，一无限长直导线，其中部被弯成半径为 r 的半圆环，当导线通有电流 I 时，求垂直于环面的轴线上距环心 o 点 x 处 P 点的磁感应强度。



解 直线部分产生的磁场属于基本结论，可代入公式：

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}(\cos 0-\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}})+\frac{\mu_0 I}{4\pi x}(-\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}-\cos\pi)$$（两段的叠加）

当然也可视为是无限长直导线减去了中间的部分（计算结果相同）：

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}-\frac{\mu_0 I}{4\pi x}(\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}-\frac{-r}{\sqrt{r^2+x^2}})=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)$$

方向竖直向下（ y 轴负方向）

圆弧部分则没有现成的结论，需要用定律计算

画图，结合立体几何知识可以得出，角度为 θ 时，电流元产生的 $\boldsymbol{B}$ 可以分解为

$$\begin{cases}\mathrm{d}B_x=B\sin\alpha\\ \mathrm{d}B_y=B\cos\alpha\sin\theta\\ \mathrm{d}B_z=B\cos\alpha\cos\theta\end{cases}$$

同时 $\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{L}}{L^3}\ \rightarrow\ B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir\mathrm{d}\theta}{L^2}$ ，因此

$$\begin{cases}\mathrm{d}B_x=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir\sin\alpha}{L^2}\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}B_y=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir\cos\alpha}{L^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\ \mathrm{d}B_z=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ir\cos\alpha}{L^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

因为积分范围是 $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$ ，因此由对称性可得 $B_z=0$ ，同时

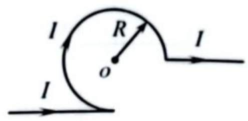
$$\begin{cases} B_x = \dfrac{\mu_0}{4}\dfrac{Ir\sin\alpha}{L^2} = \dfrac{\mu_0}{4}\dfrac{Ir^2}{(r^2+x^2)^{3/2}} \\ B_y = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{Ir\cos\alpha}{L^2} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{Irx}{(r^2+x^2)^{3/2}} \end{cases}$$

最后加上直导线产生的 B_1 并合成，得到该点的磁感应强度

$$\boldsymbol{B} = (-\frac{\mu_0}{4}\frac{Ir^2}{(r^2+x^2)^{3/2}}, -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Irx}{(r^2+x^2)^{3/2}} - \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\right))$$

评注 所以，一旦不得不用毕奥–萨伐尔定律来求 $\boldsymbol{B}$，事情就会变得非常的麻烦，对立体几何、空间想象力以及叉乘的掌握都是一个巨大的考验。因此考试考查的基本都是可以只用已知结论求解的题型

例 2 一无限长直导线通有电流 I，如图弯成一个半径为 R 的 3/4 圆，则圆心 o 处的磁感应强度为____________。



解 根据叠加原理，将该导线分为三个部分：左边的半无限直导线、3/4 圆、右边的半无限直导线

① o 点位于右边的半无限直导线所在直线上，因此这部分导线不在 o 点产生场强

② 左边的半无限直导线可根据基本结论求 $\boldsymbol{B}$：

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

由右手螺旋法则，方向垂直纸面向外

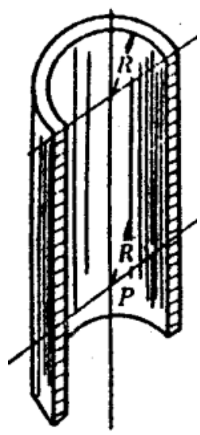
③ 3/4 圆符合特殊结论，因此可直接代入公式求解：

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{3/2\pi}{2\pi} = \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

由右手螺旋法则，方向垂直纸面向里

由此叠加，得到 $B = B_2 - B_1 = \dfrac{3\mu_0 I}{8R} - \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R} = \dfrac{\mu_0 I}{4R}(\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\pi})$ 方向垂直纸面向里

例 3 在半径为 R 的无限长半圆筒形金属薄壁中，自上而下通过电流 I，设电流均匀地分布在薄壁上，求轴线上 P 点的磁感应强度。



解 薄壁可以看成是连续分布的无限长直电流的叠加因此使用微元法

从薄壁电流的横截面入手，可以得出电流的线密度为

$$j = \frac{I}{\pi R}$$

截面是一个半圆弧，因此取微元 $\mathrm{d}I = jR\mathrm{d}\theta$， $0 < \theta < \pi$

由无限长直导线的结论，微元 $\mathrm{d}I$ 在 P 点产生的磁感应强度大小

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi R} = \frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi^2 R}\mathrm{d}\theta$$

方向则随 θ 变化而变化，但都与轴线垂直，因此根据右螺旋法则，可以分解为

$$\mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B\sin\theta$$
$$\mathrm{d}B_y = \mathrm{d}B\cos\theta$$

根据积分区间及对称性，$B_y = 0$，$B_x = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R}\sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$，因此，$B = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$

3. **运动电荷产生的磁感应强度**

① 单个电荷 q 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动产生的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

② **电荷运动的等效电流**

当有多电荷（尤其是连续分布电荷）进行匀速运动时，可考察某截面单位时间通过的电荷量而求 I

例 4 一圆盘的半径为 R，中心点为 o，圆盘表面上均匀分布着面密度为 σ 并与圆盘固结在一起的电荷。假定圆盘以角速度 ω 绕对称轴转动，求轴上一点的磁感应强度。

解 圆盘转动时，将其分解为无数个微元圆环，每个圆环上的电荷作圆周运动，可以等效为环形电流

对于半径为 r，宽 $\mathrm{d}r$ 的圆环，在时间 Δt 内，圆盘转动 $\Delta\theta = \omega\Delta t$，流过截面的电荷量为

$$q = \sigma r\Delta\theta \mathrm{d}r$$

由此可得出圆环的等效电流为

$$\mathrm{d}I = \frac{q}{\Delta t} = \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

因此根据已有结论，在圆盘轴上一点（距圆心 x），该圆环产生的磁感应强度为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 r^2 \mathrm{d}I}{2(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 r^3 \sigma\omega \mathrm{d}r}{2(r^2+x^2)^{3/2}}$$

因此对整个圆盘积分（提示：用分部积分法）：

$$B = \int_0^R \frac{\mu_0 r^3\sigma\omega\mathrm{d}r}{2(r^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \frac{r^3}{(r^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{2x^2+R^2}{\sqrt{x^2+R^2}} - 2x\right]$$

评注 运动电荷，特别是连续分布电荷转动产生的磁场，关键在于求出等效电流。由于题目涉及的都是匀速运动（不然就不是稳恒磁场了），一般通过设定一个时间段，选择一个与运动方向垂直的截面，求该时间段内通过的电荷量从而求出等效电流

4. **用安培环路定理求磁感应强度**

① **安培环路定理**

· 在稳恒磁场中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿任何回路的线积分等于闭合回路所包围电流的代数和的 μ_0 倍

$$\boxed{\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\sum I_{内}}$$

· 电流方向与积分路径绕行方向呈右螺旋关系时取正号，反之取负号

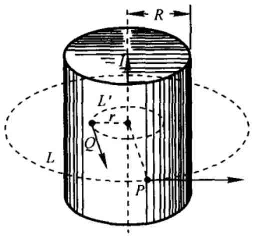
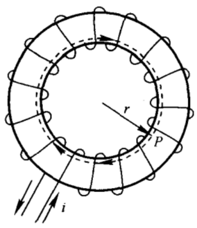
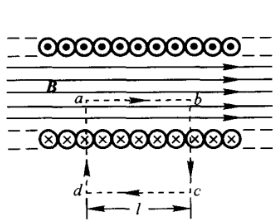
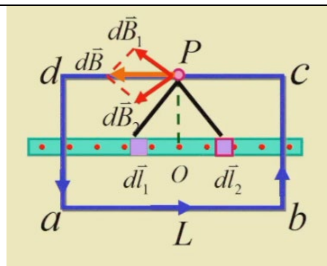
用安培环路定理与叠加原理求磁感应强度的基本流程

· 检查条件：磁场分布应当呈现一定的对称性，使得有环路的积分可以化简为乘积
这依赖电流的分布呈现对称性

· 若条件满足，找到一个合适的环路，使它的环路积分可以化简为 B 的表达式

· 代入公式，求解方程组，即可得到 B 的大小，方向则通过右手螺旋法则求出

② **常用结论**

无限长载流圆柱体	载流螺绕环	长直载流螺线管	无限大载流平面
			
$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r>R\\ \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}, & r<R\end{cases}$	$B=\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi R}=\mu_0 nI$	$B=\mu_0 nI$	$B=\dfrac{\mu_0}{2}j$
	n： 单位长度环绕的线圈匝数		j： 电流线密度
方向由右螺旋法则确定			

③ **与叠加定理结合**

· 有些因不对称无法适用安培环路定理的磁场可以分解为多个可以适用的磁场的叠加

例 5 在一半径为 R 的长圆柱形导体内，有一半径为 a 的圆柱形空腔，它们的轴线相互平行，间距为 d。设该导体载有分布均匀的电流 I，求空腔内任一点的磁感应强度

解 看似这个磁场是不对称的，无法适用安培环路定理，但实际上这个磁场可以看成是两个无限长载流圆柱体产生的磁场的叠加，定理分别适用

如图所示，设点 O 至点 P 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，点 O' 至点 P 的矢径为 $\boldsymbol{r}'$

对于半径 R 的载流圆柱体产生的磁场（设电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$），其电流密度应当为

$$\boldsymbol{j}=\frac{I}{\pi(R^2-a^2)}\boldsymbol{k}$$

根据已有结论，其在 P 点产生的场强 $B=\dfrac{\mu_0 rj}{2}$，结合右螺旋法则，可以表示为 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}$

对于半径 a 的载流圆柱体产生的磁场，可视为电流反向，其在 P 点产生的场强 $\boldsymbol{B}'=-\dfrac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}'$

则由叠加定理：$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'=\dfrac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}-\dfrac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}'=\dfrac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\dfrac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{d}$

其中$\boldsymbol{d}$为点O指向O'的矢径，因此空腔内的场强为定值：

$$B=\frac{\mu_0}{2}\frac{I}{\pi(R^2-a^2)}(R-a)=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{(R+a)}$$

二　求磁通量

1. 磁通量的定义

· 磁通量是磁感应强度B在某个曲面S上的第二类曲面积分

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{m}}=\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

· 对于闭合曲面，规定外法线方向为法线正方向

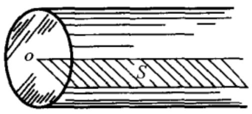
由定义求磁通量的基本流程

· 首先应求出磁感应强度$\boldsymbol{B}$的分布

· 取曲面S上的面积微元，规定正法线方向，表示出$\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，然后进行积分

大物一般只考查平面的磁通量，积分会相对简单很多，一定要熟练掌握，电磁感应部分经常用

例 6　一根长铜线载有分布均匀的电流I，在铜线内部作一假想的平面S，如图所示。求通过每米导线内的S平面的磁通量。



解　设铜线半径为R，由安培环路定理，根据已知结论，得到磁感应强度分布：

$$B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$$

由于S平面上的磁感应强度只随r变化，将S分割为长l宽$\mathrm{d}r$的小长条，其上的磁通量

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}r\mathrm{d}r \text{（设 } S \text{ 的法矢量与 } B \text{ 同向）}$$

积分得到磁通量

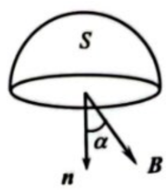
$$\Phi_{\mathrm{m}}=\int_0^R\frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}r\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{4\pi}\qquad\therefore\ \text{单位长度磁通量为}\frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

2. 磁场高斯定理

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{m}}=\oint_s \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0}$$

· 用处：求简单曲面的磁通量以获得复杂曲面的磁通量

例 7　在磁感应强度为$\boldsymbol{B}$的均匀磁场中，作一半径为r的半球面S，S边线所在平面的法线方向单位矢量$\boldsymbol{n}$与$\boldsymbol{B}$的夹角为α，则通过半球面S的磁通量（取弯面向外为正）为__________。



解　由磁场高斯定理，$\Phi_{\mathrm{m}}=\oint_{S+S'}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S'}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$

对于边线平面S'，$\int_{S'}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=BS\cos\alpha=\pi r^2B\cos\alpha$

因此$\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_{S'}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boxed{-\pi r^2B\cos\alpha}$

三　求磁矩

1. 磁矩的概念

· 与闭合回路相关的物理量

$$\boxed{\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}} = NIS\boldsymbol{e}_n}$$

例 8　从经典观点看，氢原子可看作是一个电子绕核作高速旋转的体系，已知电子和质子的电荷分别为 $-e$ 和 e，电子质量为 m_e，氢原子的圆轨道半径为 r，电子作平面轨道运动，则电子轨道运动的磁矩为__________.

解　由库仑定律和圆周运动，电子绕核的线速度

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m_e\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi m_e \varepsilon_0 r}}$$

单位时间内通过的电荷量为 e × 单位时间通过电子数目（= 电子单位时间绕圈数目 = 频率）

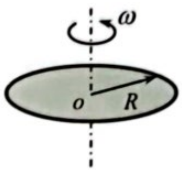
因此根据电流定义：

$$I = e\frac{v}{2\pi r}$$

∴ 磁矩

$$p_{\mathrm{m}} = IS = e\frac{v}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{e^2}{4}\sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m_e}}$$

例 9　如图所示，一半径为 R 的塑料圆盘，表面上均匀分布有电量为 $+q$ 的电荷，圆盘以角速度 ω 绕通过中心且与盘面垂直的轴转动。则该圆盘的磁矩 p_{m} 的大小为__________；方向为__________。



解　之前例 4 中已经解过，半径为 r 处的等效环形电流强度

$$\mathrm{d}I = \sigma\omega r\mathrm{d}r = \frac{q}{\pi R^2}\omega r\mathrm{d}r$$

则这个环形电流的磁矩 $\mathrm{d}p_{\mathrm{m}} = S\mathrm{d}I = \pi r^2 \cdot \frac{q}{\pi R^2}\omega r\mathrm{d}r = \frac{q\omega}{R^2}r^3\mathrm{d}r$，方向沿轴向上

因此积分得到

$$p_{\mathrm{m}} = \int_0^R \frac{q\omega}{R^2}r^3\mathrm{d}r = \frac{1}{4}q\omega R^2 \quad \text{方向沿轴向上}$$

四　求磁场作用力与功

1. 安培力

· 安培力是洛伦兹力的宏观表现，对于某电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，该处磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，则受到安培力

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}}$$

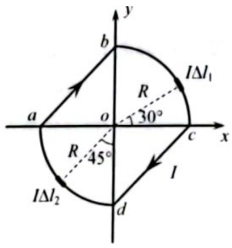
· 对于一段导线受到的安培力，根据力的叠加原理相加（积分）

$$\boxed{\boldsymbol{F}=\int_{L} I \mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}}$$

· 均匀磁场中，一段弯曲导线受到的安培力等于同一起终点的直导线受到的安培力，直导线受力为

$$\boxed{\boldsymbol{F}=I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}}$$

例 10 如图所示，在 xOy 平面（即纸面）内有一载流线圈 $abcda$，其中 bc 弧和 da 弧皆为以 o 为圆心半径 R 的 1/4 圆弧，$\overline{ab}$ 和 $\overline{cd}$ 皆为直线，电流 I，其流向沿 $abcda$ 的绕向；电流元 $\Delta l_1=\Delta l_2=\Delta l$，位置如图。设线圈处于磁感应强度 B 的均匀磁场中，$\boldsymbol{B}$ 方向沿 x 轴正方向。试求以下电流元或载流导线在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的受力：



（1）电流元 $I\Delta l_1$ 和 $I\Delta l_2$ 所受安培力 $\Delta\boldsymbol{F}_1$ 和 $\Delta\boldsymbol{F}_2$ 的大小和方向；

（2）直线段 $\overline{ab}$ 和 $\overline{cd}$ 所受到的安培力 $\boldsymbol{F}_{ab}$ 和 $\boldsymbol{F}_{cd}$ 的大小和方向；

（3）圆弧段 bc 弧和 da 弧所受到的安培力 $\boldsymbol{F}_{bc}$ 和 $\boldsymbol{F}_{da}$ 的大小和方向.

解 （1）由安培力的微分式 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$

$$\Delta F_1=I\Delta l_1 B\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}I\Delta lB \quad \text{方向垂直纸面向外}$$

$$\Delta F_2=I\Delta l_2 B\sin 135°=\frac{\sqrt{2}}{2}I\Delta lB \quad \text{方向垂直纸面向内}$$

（2）直线段的长度均为 $\sqrt{2}R$，则直导线所受安培力

$$F_{ab}=I\sqrt{2}RB\sin 45°=IRB \quad \text{方向垂直纸面向里}$$

$$F_{cd}=I\sqrt{2}RB\sin 135°=IRB \quad \text{方向垂直纸面向}$$

（3）此时 $\mathrm{d}F=IRB\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\mathrm{d}\theta=IRB\cos\theta\mathrm{d}\theta$，则

$$F_{bc}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} IRB\cos\theta\mathrm{d}\theta=IRB \quad \text{方向垂直纸面向外}$$

$$F_{ad}=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} IRB\cos\theta\mathrm{d}\theta=IRB \quad \text{方向垂直纸面向里}$$

当然，可以直接利用结论，计算 bc 和 ad 直导线所受安培力

2. **载流平面线圈的磁力矩**

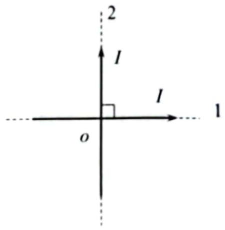
· 一般情况下，线圈受到的力矩

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times(I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})}$$

· 均匀磁场中，线圈受到的力矩

$$\boxed{\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{B}}$$

例 11 如图所示，两根相互绝缘的无限长直导线 1 和 2 绞接于 o 点，两导线间的夹角为 90°，通有相同的电流 I，求距导线 2 r 处，导线 1 的单位长度线段所受磁力对 o 点的力矩大小



解 导线 2 产生的磁感应强度为 $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$，方向垂直纸面向里（$r>0$）或向外（$r<0$）

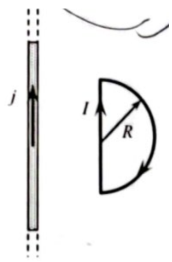
导线 1 r 处 $I\mathrm{d}l = I\mathrm{d}r$，方向向右，因此力矩

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r}\times(I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}) \rightarrow \mathrm{d}M = rI\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\mathrm{d}r$$

因此单位长度线段所受磁力对 o 点的力矩大小为

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi}$$

例 12 如图所示，在电流密度为 j 的均匀载流无限大平板附近，有一载流为 I，半径为 R 的半圆形刚性线圈，其线圈平面与载流大平面垂直，线圈所受磁力矩为________；若线圈平行于载流大平面，则所受磁力矩大小为________。



解 均匀载流无限大平板在右侧附近产生的磁感应强度为 $\frac{\mu_0}{2}j$，方向垂直纸面向里

因为是均匀磁场，所以可用磁矩计算磁力矩

∵ 磁矩与线圈平面垂直 ∴ 线圈平面与载流大平面垂直时，磁矩平行于 $\boldsymbol{B}$，因此磁力矩为 0

线圈平行于载流大平面时，磁矩垂直于 $\boldsymbol{B}$，因此

$$M = p_{\mathrm{m}}B\sin 90° = \frac{\mu_0\pi R^2 Ij}{4}$$

3. **磁力做功**

· 一个任意的闭合载流回路，在磁场中改变位置或形状时，磁力或磁力矩做的功

$$\boxed{\mathrm{d}A = I\mathrm{d}\Phi}$$

例 13 由细软导线做成的圆环，半径为 R，流过电流 I，将圆环放在磁感应强度 B 的均匀磁场中，磁场的方向与圆电流的磁矩方向一致，今有外力作用在导线环上，使其变成正方形，则在维持电流不变的情况下，外力克服磁场力所作的功是__________。

解 导线由圆形变成正方形，周长不变，面积变化。设正方形边长 a，则有

$$2\pi R = 4a \quad 因而 \quad a = \frac{\pi R}{2}$$

则磁场力做功

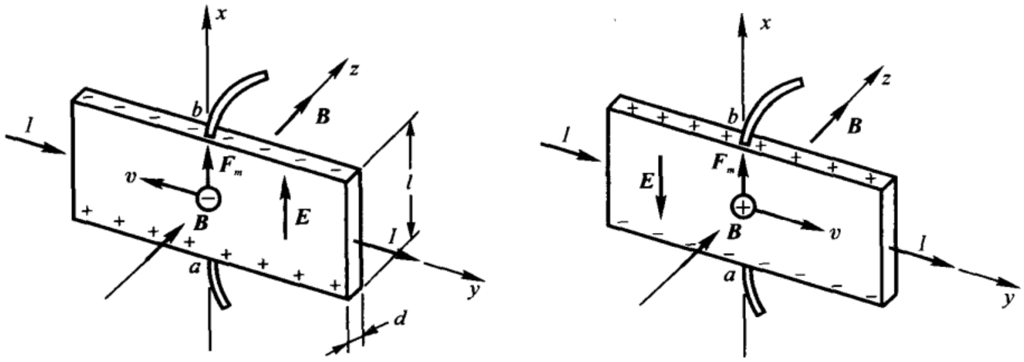
$$A = I\Delta\Phi = IB\Delta S = IB(a^2 - \pi R^2) = IB\pi R^2(\frac{\pi}{4} - 1)$$

因此外力克服磁场力做功 $-A = IB\pi R^2(1 - \frac{\pi}{4})$

三　霍尔效应

1. **霍尔效应**

· 处在均匀磁场中的通电导体薄板，当电流方向与磁场方向垂直时，则在垂直于磁场和电流方向的薄板上、下两端之间出现电势差



· 电势差方向判别：载流子带负电荷，则 $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$ 的方向为 $\boldsymbol{E}$ 的方向

载流子带正电荷，则 $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$ 的反方向为 $\boldsymbol{E}$ 的方向

> 判断电势差方向基本每年期中考都考，若记不清结论，就先推导洛伦兹力的方向，再根据电荷得出结论
> 有时候是已知电势差，判断磁场方向、电流方向、载流子，也要熟练

2. **霍尔元件**

· 霍尔电压 $\boxed{U_H = R_H\dfrac{IB}{d}}$　　霍尔系数 $\boxed{R_H = \dfrac{1}{nq}}$　　d：厚度　　n：载流子浓度

例 14 如图所示，把一宽 l 为 2.0×10^{-2}m，厚度 d 为 1.0×10^{-3}m 的铜片放在磁感应强度 $B=1.5$T 的均匀磁场中，如果铜片中通有 200A 的电流，则铜片______（填“左”或“右”）的电势高，霍尔电势差为__________。（已知铜的电子浓度为 8.5×10^{28}l/m^3）

解　由图知，载流子为负电荷，$\boldsymbol{B}$ 竖直向上，I 垂直纸面向里

由右螺旋法则，电场方向向右，因此左侧电势高

由霍尔电势差公式

$$U_H = R_H\frac{IB}{d} = \frac{1}{ne}\frac{IB}{d} = 2.2\times10^{-5}\,\text{V}$$